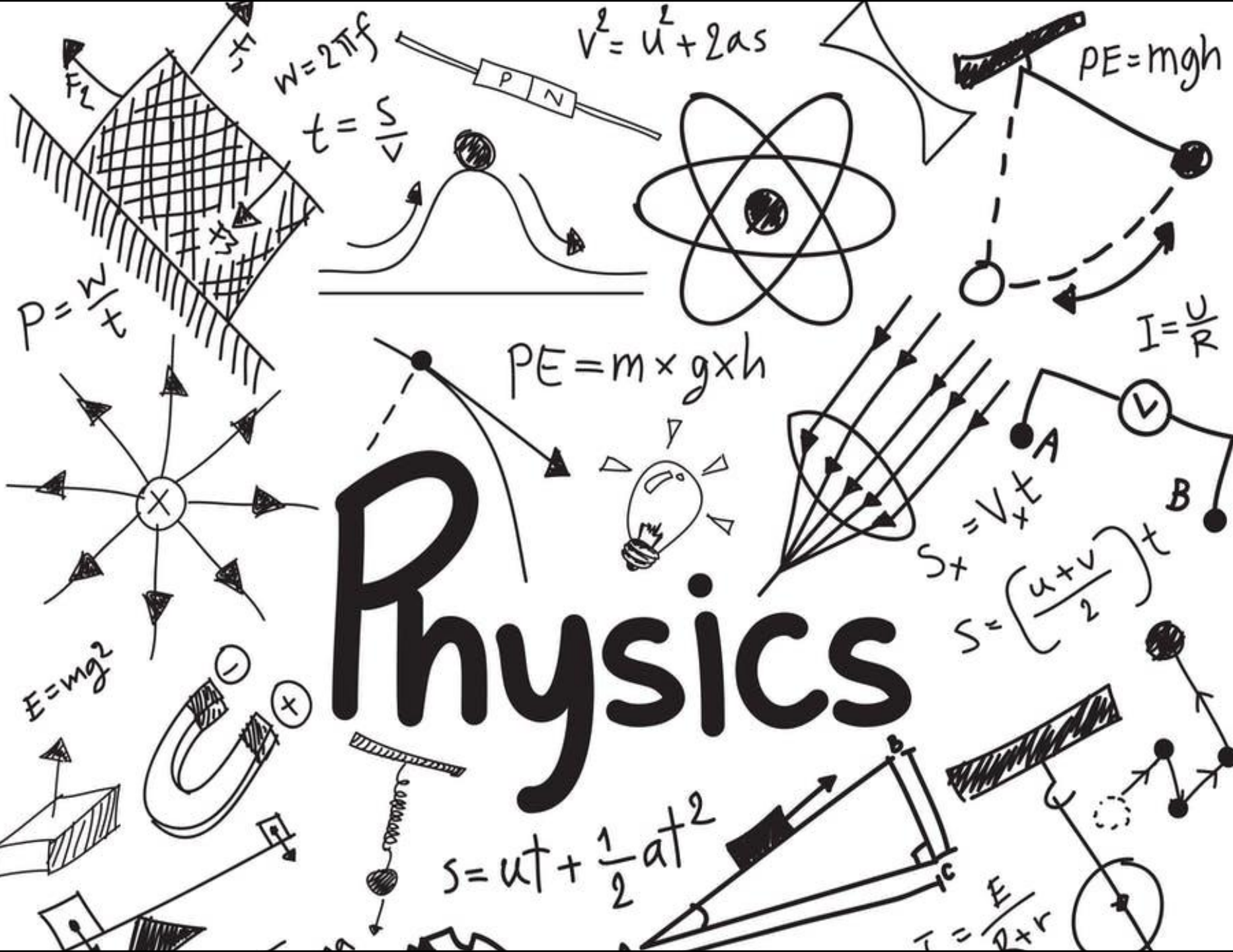


Physics



Reminder...

- ◉ Διαλέξεις
 - ◉ Προαιρετική παρουσία!
- ◉ Είστε εδώ γιατί **θέλετε** να ακούσετε/συμμετέχετε
- ◉ Δεν υπάρχουν απουσίες
- ◉ Υπάρχει σεβασμός στους συναδέλφους σας και στην εκπαιδευτική διαδικασία
- ◉ Προστατέψτε εσάς και τους συναδέλφους σας: απέχετε από το μάθημα αν δεν είστε/αισθάνεστε καλά



Εικόνα: Τα αυτιά του ανθρώπου έχουν εξελιχθεί να ακούν και να ερμηνεύουν ηχητικά κύματα ως φωνή ή ως ήχους. Κάποια ζώα, όπως το είδος αλεπούς με τα αυτιά νυχτερίδας, έχουν αυτιά που είναι προσαρμοσμένα να ακούν πολύ αδύναμους ήχους.

Φυσική για Μηχανικούς

Ηχητικά Κύματα

Το φαινόμενο Doppler



Εικόνα: Τα αυτιά του ανθρώπου έχουν εξελιχθεί να ακούν και να ερμηνεύουν ηχητικά κύματα ως φωνή ή ως ήχους. Κάποια ζώα, όπως το είδος αλεπούς με τα αυτιά νυχτερίδας, έχουν αυτιά που είναι προσαρμοσμένα να ακούν πολύ αδύναμους ήχους.

Φυσική για Μηχανικούς

Ηχητικά Κύματα

Το φαινόμενο Doppler

Ηχητικά Κύματα

• Το φαινόμενο Doppler

- Άκρως συχνή εμπειρία!
- Ένα όχημα με σειρήνα μας πλησιάζει και απομακρύνεται από μας
 - Το ακούμε με υψηλότερη συχνότητα καθώς έρχεται προς εμάς
 - Το ακούμε με χαμηλότερη συχνότητα καθώς απομακρύνεται

Doppler effect

Στάσιμη πηγή ήχου



Πηγή ήχου που πλησιάζει



Παρατηρητής

Πηγή ήχου που απομακρύνεται

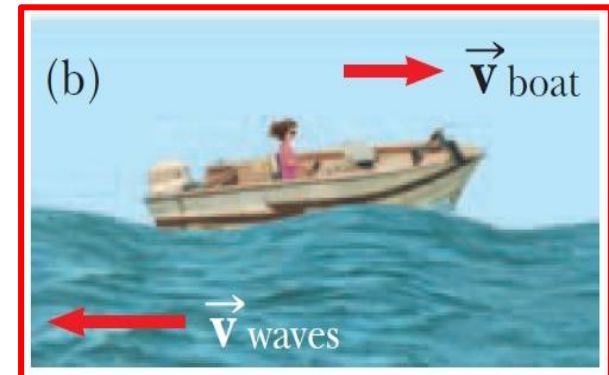
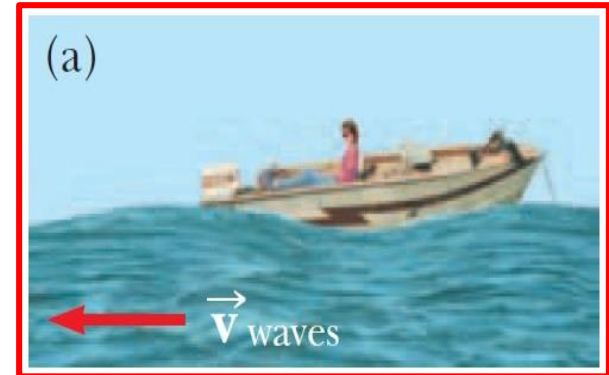


Ηχητικά Κύματα

• Το φαινόμενο Doppler

• Διαισθητική κατανόηση

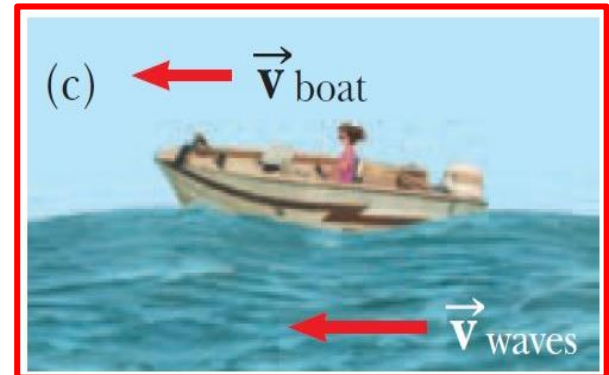
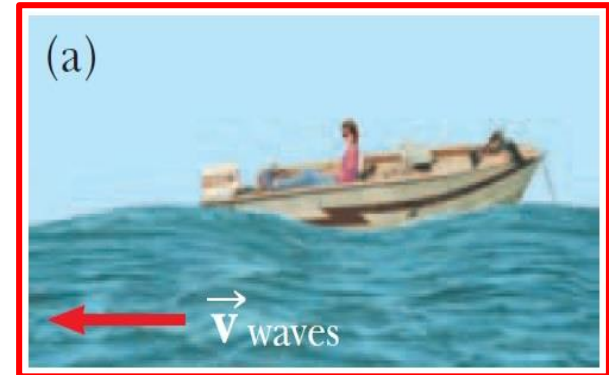
- Κύματα χτυπούν την ακίνητη βάρκα με περίοδο T
- Αν προχωρήσει η βάρκα προς την πηγή, κάθε κυματισμός θα φτάνει γρηγορότερα απ' ό,τι πριν
 - Λόγω της κίνησής μας προς την πηγή
- Μετράμε περίοδο $T' < T$
- Τα κύματα φτάνουν «πιο συχνά» στη βάρκα
 - $f' = 1/T' > f = 1/T$



Ηχητικά Κύματα

• Το φαινόμενο Doppler

- Διαισθητική κατανόηση
 - Κύματα χτυπούν την ακίνητη βάρκα με περίοδο T
 - Αν προχωρήσει η βάρκα μακριά από την πηγή, κάθε κυματισμός θα φτάνει αργότερα απ' ό,τι πριν
 - Λόγω της κίνησής μας μακριά από την πηγή
 - Μετράμε περίοδο $T' > T$
 - Τα κύματα φτάνουν «πιο αραιά» στη βάρκα
 - $f' = 1/T' < f = 1/T$



Ηχητικά Κύματα

- Το φαινόμενο Doppler

- Ευθέως ανάλογα για μια ηχητική πηγή



Ηχητικά Κύματα

- Το φαινόμενο Doppler

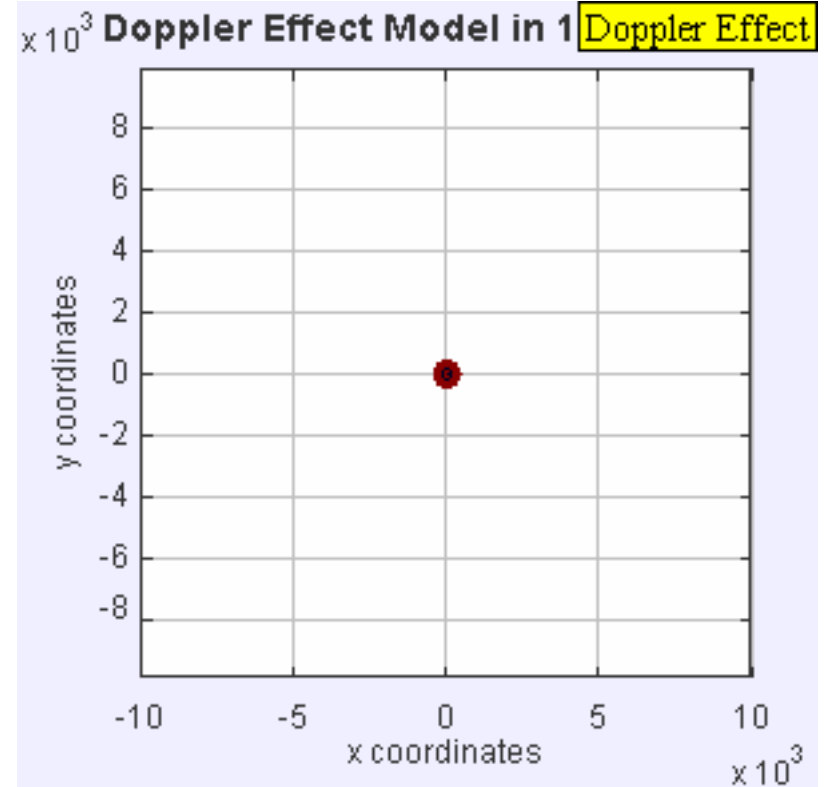
- Στάσιμη πηγή

- Συχνότητα πηγής f

- Περίοδος T

- Μήκος κύματος λ

- Ένας ακίνητος παρατηρητής
αντιλαμβάνεται τη συχνότητα f της πηγής



Ηχητικά Κύματα

• Το φαινόμενο Doppler

• Κινούμενη πηγή

• Προς τον παρατηρητή

• Συχνότητα πηγής f

• Περίοδος T

• Μήκος κύματος λ

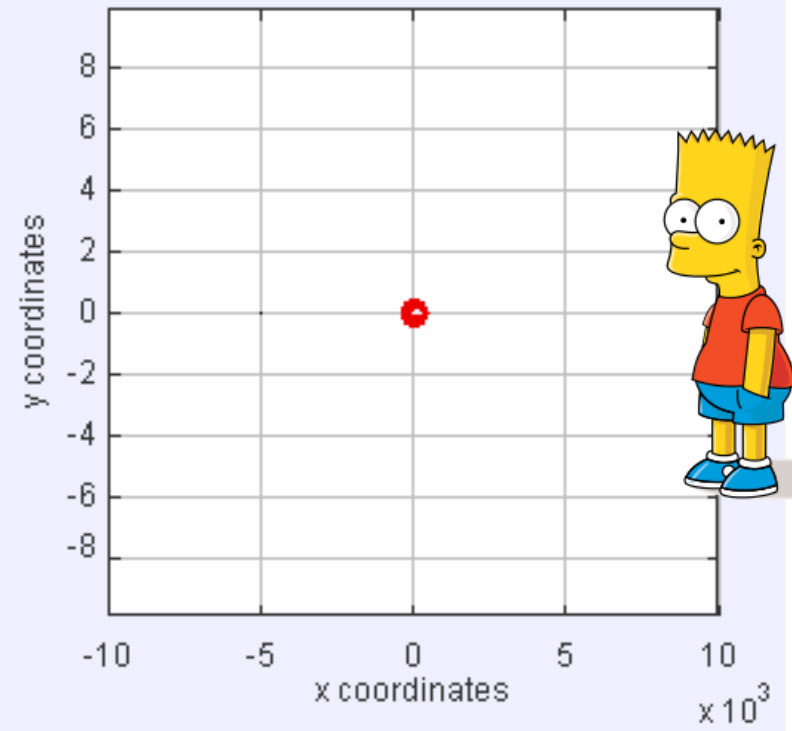
• Ταχύτητα πηγής u_s

• Ταχύτητα ήχου u

• Ένας ακίνητος παρατηρητής αντιλαμβάνεται συχνότητα

$$f' = \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{\lambda - \frac{u_s}{f}} = \frac{u}{\left(\frac{u}{f}\right) - \left(\frac{u_s}{f}\right)} = \left(\frac{u}{u - u_s}\right) f$$

$\times 10^3$ Doppler Effect Model in 1 Doppler Effect

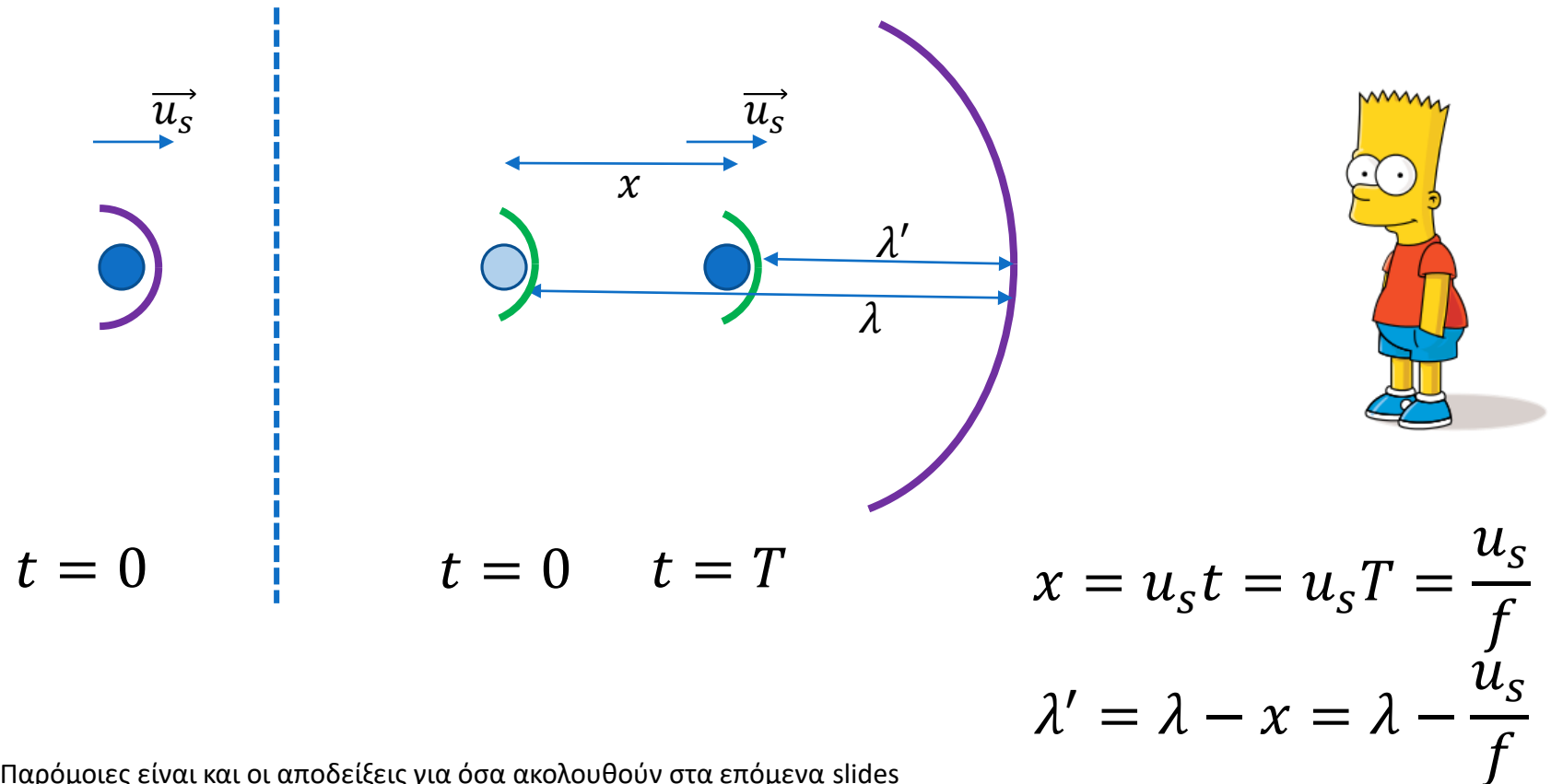


Ηχητικά Κύματα

• Το φαινόμενο Doppler

• Κινούμενη πηγή προς τον παρατηρητή - επεξήγηση

— 1^ο κυματικό μέτωπο
— 2^ο κυματικό μέτωπο



Παρόμοιες είναι και οι αποδείξεις για όσα ακολουθούν στα επόμενα slides

Ηχητικά Κύματα

• Το φαινόμενο Doppler

• Κινούμενη πηγή

• Μακριά από τον παρατηρητή

• Συχνότητα πηγής f

• Περίοδος T

• Μήκος κύματος λ

• Ταχύτητα πηγής u_s

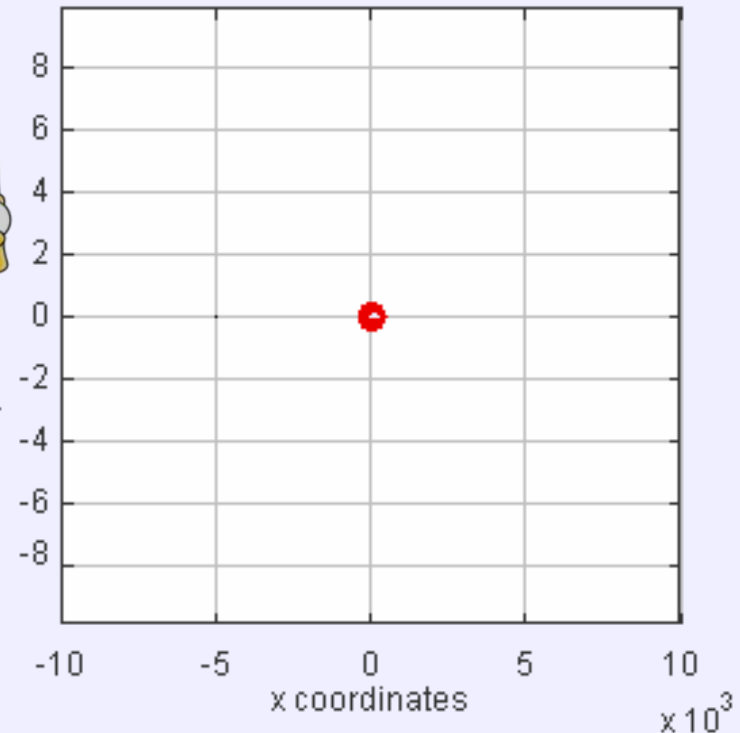
• Ταχύτητα ήχου u

• Ένας ακίνητος παρατηρητής αντιλαμβάνεται συχνότητα

$$f' = \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{\lambda + \frac{u_s}{f}} = \frac{u}{\left(\frac{u}{f}\right) + \left(\frac{u_s}{f}\right)} = \left(\frac{u}{u + u_s}\right) f$$



$\times 10^3$ Doppler Effect Model in 1 Doppler Effect



Ηχητικά Κύματα

• Το φαινόμενο Doppler

• Κινούμενος παρατηρητής

• Πλησιάζει την πηγή

• Συχνότητα πηγής f

• Περίοδος T

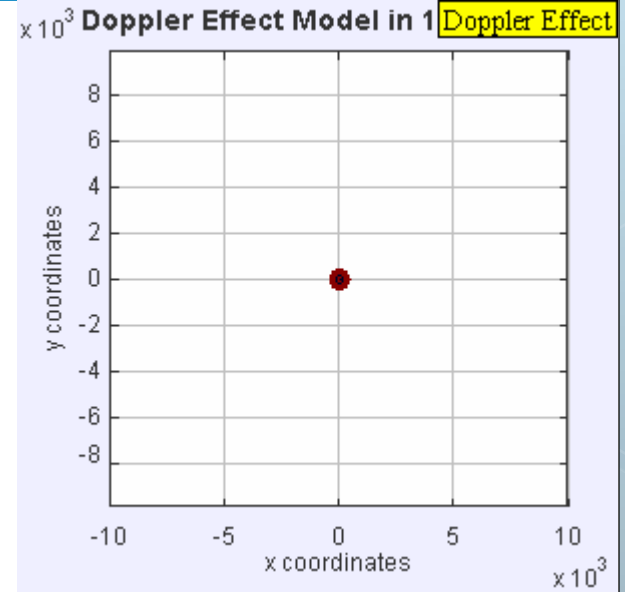
• Μήκος κύματος λ

• Ταχύτητα παρατηρητή u_o

• Ταχύτητα ήχου u

• Ένας κινούμενος παρατηρητής που πλησιάζει την πηγή αντιλαμβάνεται συχνότητα

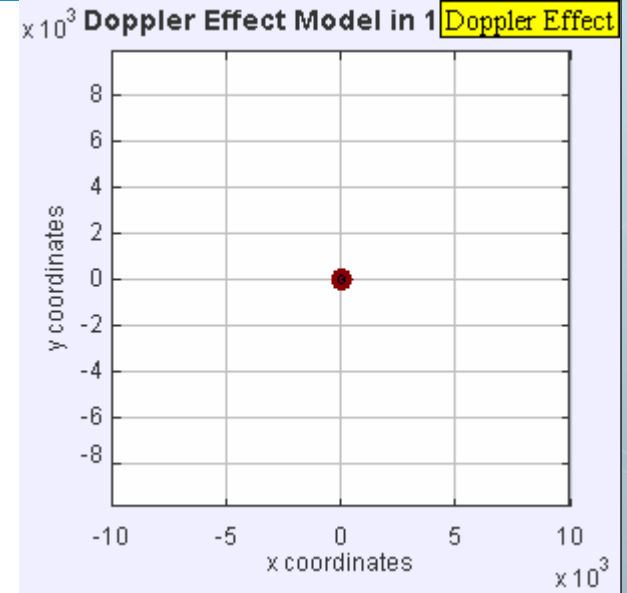
$$f' = \frac{u'}{\lambda} = \left(\frac{u + u_o}{u} \right) f$$



Ηχητικά Κύματα

• Το φαινόμενο Doppler

- Κινούμενος παρατηρητής
 - Απομακρύνεται από την πηγή
- Συχνότητα πηγής f
- Περίοδος T
- Μήκος κύματος λ
- Ταχύτητα παρατηρητή u_o
- Ταχύτητα ήχου u



- Ένας κινούμενος παρατηρητής που απομακρύνεται από την πηγή αντιλαμβάνεται συχνότητα

$$f' = \frac{u'}{\lambda} = \left(\frac{u - u_o}{u} \right) f$$

Ηχητικά Κύματα

• Το φαινόμενο Doppler

- Κίνηση και των δυο
- Συχνότητα πηγής f
- Περίοδος T
- Μήκος κύματος λ
- Ταχύτητα παρατηρητή u_o και πηγής u_s
- Ταχύτητα ήχου u

- Ένας **κινούμενος** παρατηρητής αντιλαμβάνεται συχνότητα μιας **κινούμενης** πηγής

Συχνότητα αντίληψης παρατηρητή $f' = \left(\frac{u \pm u_o}{u \pm u_s} \right) f$ Συχνότητα εκπομπής πηγής

Ταχύτητα παρατηρητή
Ταχύτητα ήχου
Ταχύτητα πηγής

Πώς επιλέγουμε πρόσημα στη σχέση αυτή?

1. Πηγή και παρατηρητής **κινούνται ο ένας προς τον άλλο**: πρόσημα που αυξάνουν το f'
2. Πηγή και παρατηρητής **απομακρύνονται ο ένας από τον άλλο**: πρόσημα που μειώνουν το f'
3. Οι ταχύτητες εννοούνται πάντα κατά **μέτρο**!

Ηχητικά Κύματα

Πώς επιλέγουμε πρόσημα στη σχέση αυτή?

• Το φαινόμενο Doppler – Quiz

- Πηγή πλησιάζει, παρατηρητής απομακρύνεται



$$f' = \frac{u - u_0}{u - u_s} f$$

- Πηγή απομακρύνεται, παρατηρητής πλησιάζει



$$f' = \frac{u + u_0}{u + u_s} f$$

- Παρατηρητής απομακρύνεται, πηγή απομακρύνεται



$$f' = \frac{u - u_0}{u + u_s} f$$

- Παρατηρητής πλησιάζει, πηγή πλησιάζει



$$f' = \frac{u + u_0}{u - u_s} f$$



Source



Observer

Ηχητικά Κύματα

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Το ξυπνητήρι σας παράγει έναν ήχο συχνότητας 600 Hz. Ένα πρωί, «κολλάει» και δεν μπορείτε να το κλείσετε. Στην απελπισία σας, το πετάτε («αφήνετε») από το παράθυρο. Αν υποθέσετε ότι η ταχύτητα του ήχου είναι 343 m/s, και ότι βρίσκεστε στον 4^ο όροφο (15 m από το έδαφος), τι συχνότητα θα ακούσετε λίγο πριν γίνει κομματάκια;



Ηχητικά Κύματα

◉ Παράδειγμα – Λύση:

- ◉ Το ξυπνητήρι σας παράγει έναν ήχο συχνότητας 600 Hz. Στην απελπισία σας, το πετάτε (αφήνετε) από το παράθυρο. Αν η ταχύτητα του ήχου είναι 343 m/s, και βρίσκεστε 15 m από το έδαφος, τι συχνότητα θα ακούσετε λίγο πριν γίνει κομματάκια;

• Έστω το σύστημα $\{Γη, ρολόι\}$, ποδυ-λές.
Είναι αποφαντικό και η μόνη δύναμη που ασκείται στο σύστημα είναι αυτή του βάρους, που είναι συντηρητική. Εφαρμόζουμε ΑΔΜΕ στη διαδρομή Α-Β.

$$K_A + U_{gA} = K_B + U_{gB}$$

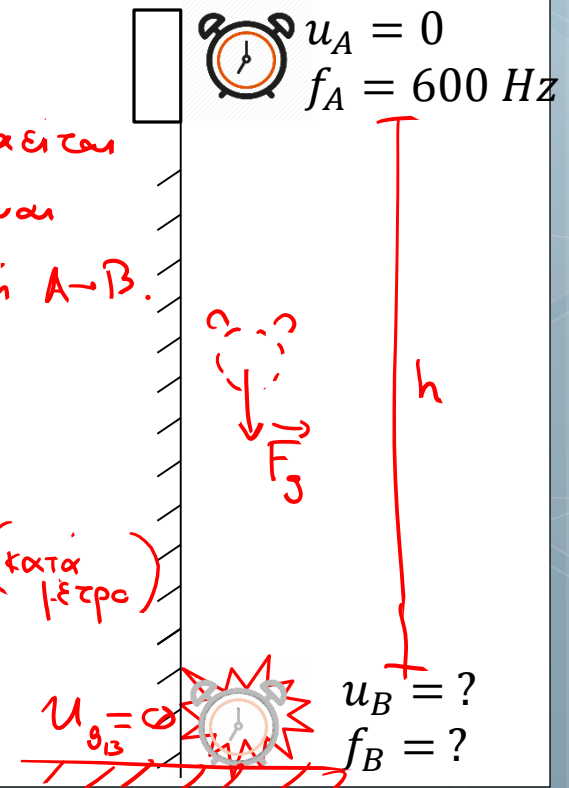
$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 + 0$$

$$u_B^2 = 2gh \Rightarrow u_B = \sqrt{2gh} \approx 17.15 \frac{m}{s} \text{ (κατά τα κάτω)}$$

οπότε

$$f' = \frac{u}{u + u_B} \cdot f \approx 571 \text{ Hz}$$

$$f' = \left(\frac{u \pm u_o}{u \pm u_s} \right) f$$





Εικόνα: Ο Carlos Santana εκμεταλλεύεται τα στάσιμα κύματα που δημιουργούνται από διαφορετικά κύματα που «προστίθενται» στις χορδές του. Αλλάζει νότα στην κιθάρα του πιέζοντας τις χορδές σε διαφορετικά σημεία, μεγαλώνοντας ή μικραίνοντας το μήκος του τμήματος της χορδής που ταλαντώνεται.

Φυσική για Μηχανικούς

Υπέρθεση



Εικόνα: Ο Carlos Santana εκμεταλλεύεται τα στάσιμα κύματα που δημιουργούνται από διαφορετικά κύματα που «προστίθενται» στις χορδές του. Αλλάζει νότα στην κιθάρα του πιέζοντας τις χορδές σε διαφορετικά σημεία, μεγαλώνοντας ή μικραίνοντας το μήκος του τμήματος της χορδής που ταλαντώνεται.

Φυσική για Μηχανικούς

Υπέρθεση

Υπέρθεση

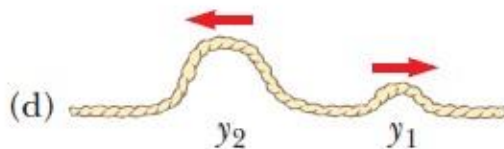
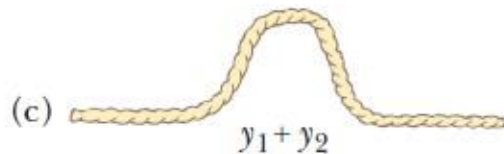
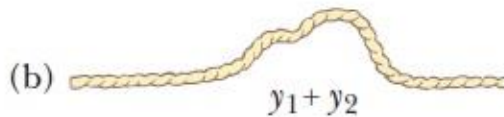
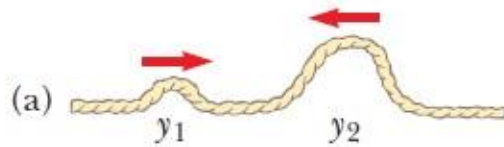
- Μελέτη κυματικής
- Βασική διαφορά κυμάτων από σωματίδια
 - Συνδυασμός σωματιδίων δίνει ένα σώμα
 - Για να συμβεί πρέπει τα σωματίδια να βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία του χώρου
 - Συνδυασμός κυμάτων δίνει ένα κύμα
 - Για να συμβεί πρέπει τα κύματα να βρίσκονται στο ίδιο σημείο!
- **Σημαντικό:** τα κύματα μπορούν να συνδυαστούν, να συνυπάρξουν, να συμβάλλουν στην **ίδια** θέση του χώρου!
 - Για να αναλύσουμε τέτοιες συμπεριφορές, απαιτείται η **αρχή της υπέρθεσης**

Υπέρθεση

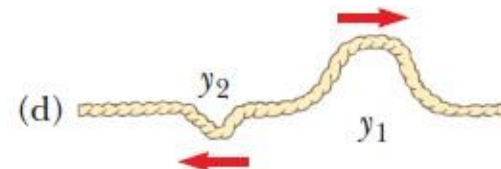
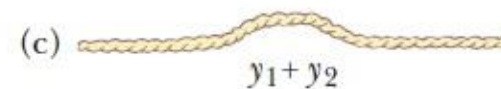
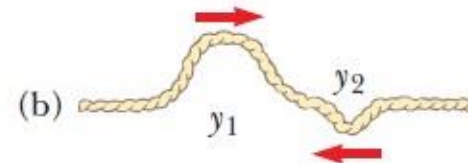
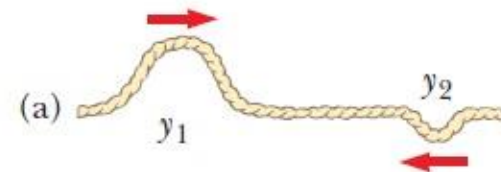
- ◉ Αρχή της υπέρθεσης
- ◉ Αν σε κάποιο μέσο διαδίδονται δυο ή περισσότερα κύματα, η συνισταμένη τιμή της κυματοσυνάρτησης σε οποιοδήποτε σημείο είναι το αλγεβρικό άθροισμα των τιμών των κυματοσυναρτήσεων των επιμέρους κυμάτων
- ◉ Τέτοια κύματα λέγονται **γραμμικά**
- ◉ Ο συνδυασμός δυο διαφορετικών κυμάτων στην ίδια περιοχή του χώρου λέγεται **συμβολή**

Υπέρθεση

○ Αρχή της υπέρθεσης



Ενισχυτική Συμβολή



Καταστρεπτική Συμβολή

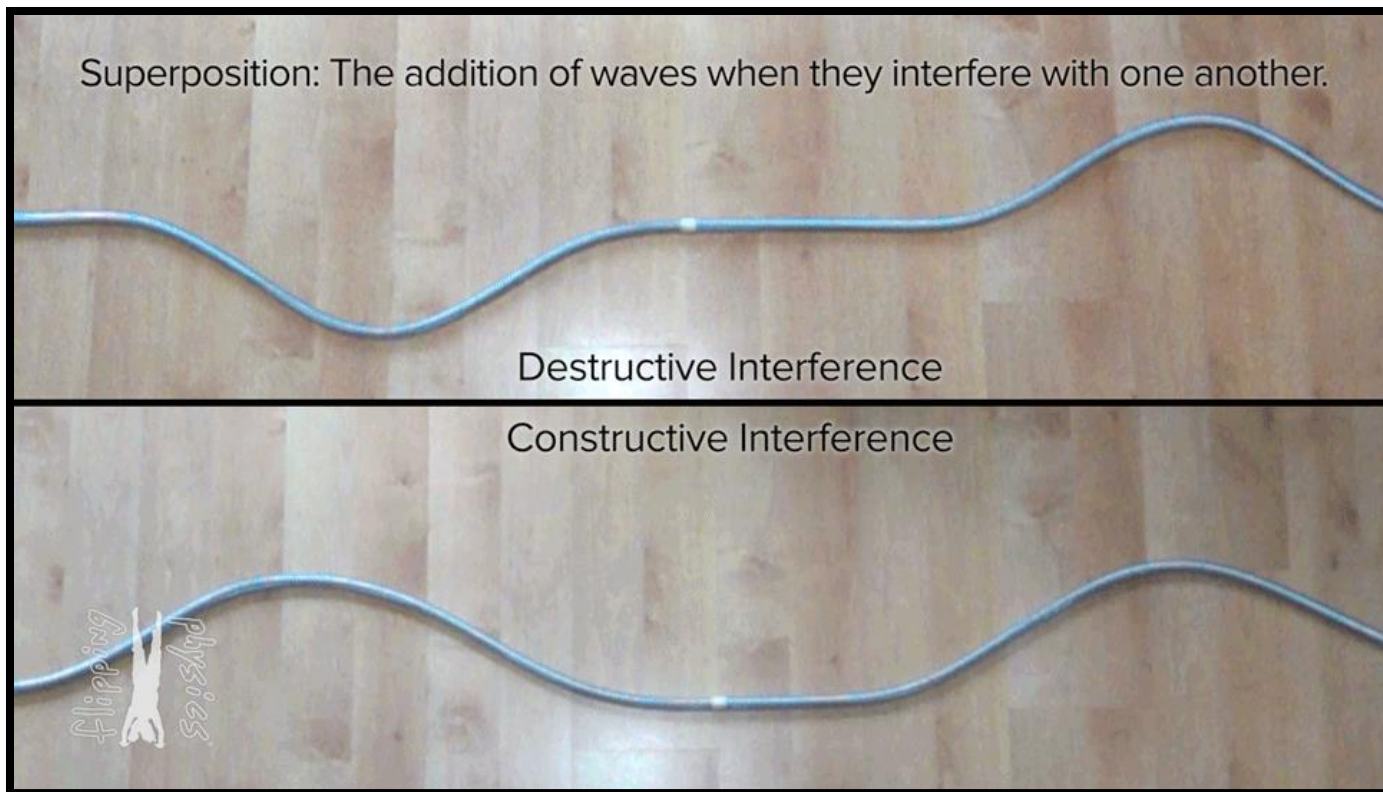
Υπέρθεση

- Αρχή της υπέρθεσης

isvr

Υπέρθεση

ο Αρχή της υπέρθεσης



Υπέρθεση

$$\sin \theta \pm \sin \varphi = 2 \sin \left(\frac{\theta \pm \varphi}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta \mp \varphi}{2} \right)$$

• Υπέρθεση ημιτονοειδών κυμάτων

- Δυο ημιτονοειδή κύματα που διαδίδονται προς μια κατεύθυνση
 - Ίδια συχνότητα ω , μήκος κύματος λ , και πλάτος A
 - Διαφορετική αρχική φάση φ

$$y_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t), \quad y_2(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

- $$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

$$= A[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx - \omega t + \varphi)]$$

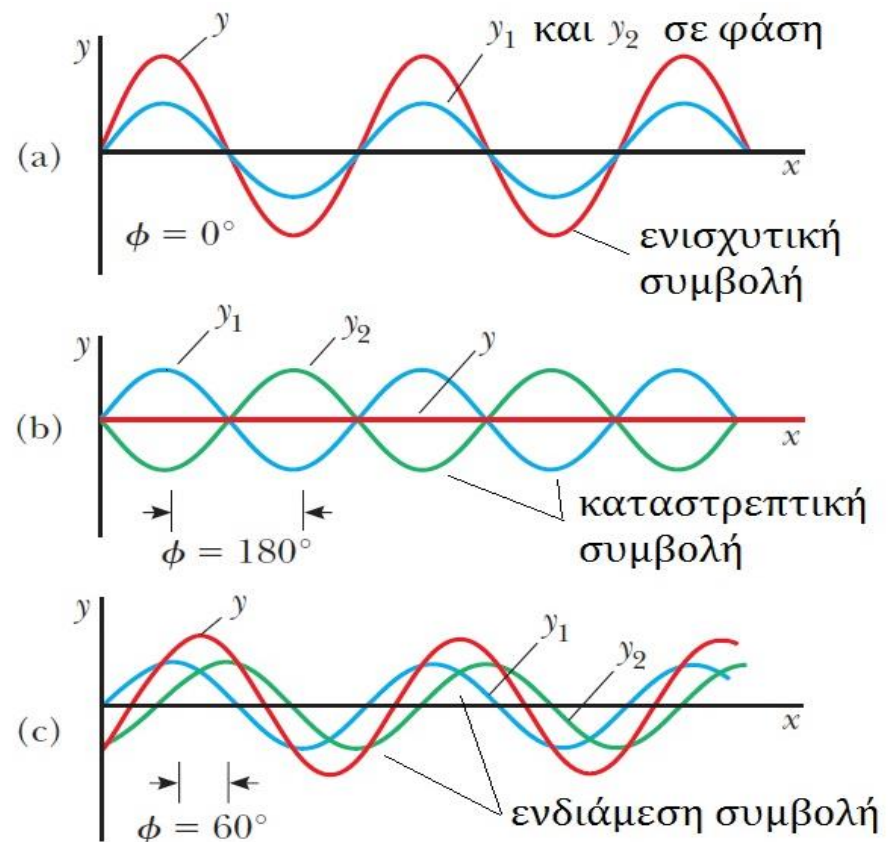
$$= \left[2A \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right] \sin \left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2} \right)$$

Υπέρθεση

Υπέρθεση ημιτονοειδών κυμάτων

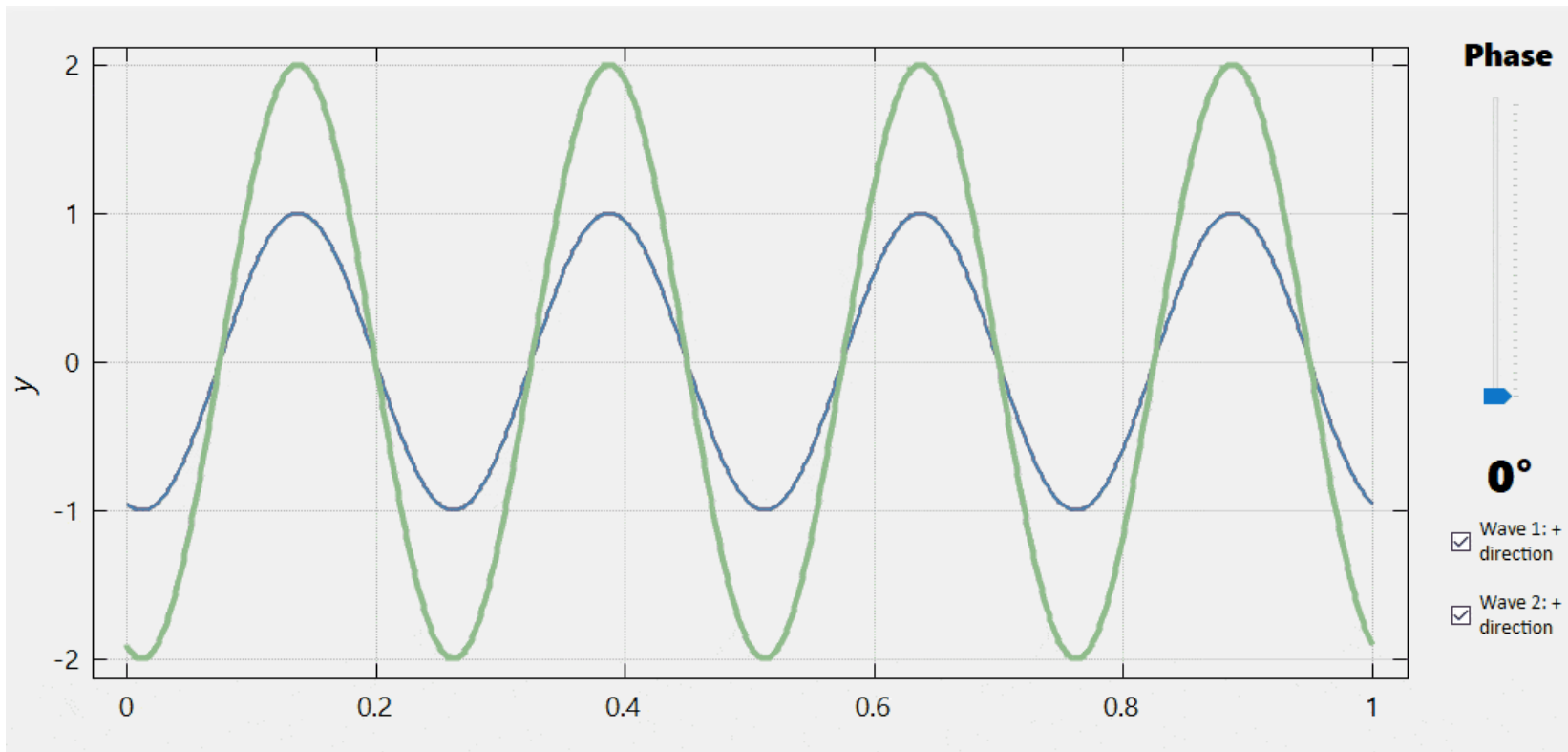
- $y(x, t) = \left[2A \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] \sin\left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$

- Ίδια συχνότητα
- Ίδιο μήκος κύματος
- (α) $\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$
 - Πλάτος $2A$
 - Κύματα **σε φάση**
 - **Ενισχυτική συμβολή**
- (β) $\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$
 - Πλάτος 0
 - Κύματα **εκτός φάσης**
 - **Καταστρεπτική συμβολή**
- (γ) Άλλες περιπτώσεις
 - $0 < \text{Πλάτος} < 2A$



Υπέρθεση

• Υπέρθεση ημιτονοειδών κυμάτων



Υπέρθεση

- Συμβολή ηχητικών κυμάτων

- Τα κύματα έχουν εν γένει το καθένα τη δική του αρχική φάση
 - ...ενώ μπορεί να διανύουν και διαφορετικές διαδρομές
- Ηχητικά κύματα από το ηχείο ακολουθούν διαφορετική διαδρομή
 - Έχουν το ίδιο πλάτος A και συχνότητα ω
 - Απόσταση ηχείου από δέκτη = **μήκος διαδρομής**

- Διαφορά διαδρομής

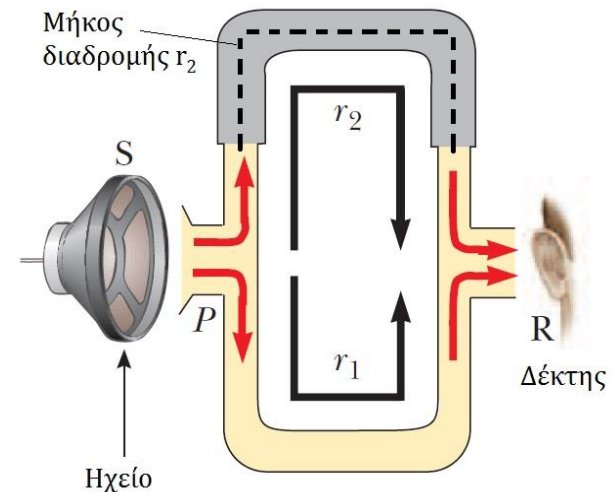
$$\Delta r = |r_2 - r_1|$$

- Φάση του καθενός κύματος

$$\Phi_i = kr_i - \omega t + \varphi_i$$

- Τότε

$$y(x, t) = \boxed{2A \cos\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}\right)} \sin\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right)$$



Υπέρθωση

$$y(x, t) = 2A \cos\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right)$$

- Συμβολή ηχητικών κυμάτων

- Έστω

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \Delta\Phi$$

- Αν $\Delta\Phi = 2m\pi$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ τότε τα κύματα συμβάλλουν **ενισχυτικά**

- Αφού

$$2A \cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) = 2A \cos(m\pi) = \pm 2A$$

- Αν $\Delta\Phi = (2m + 1)\pi$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ τότε τα κύματα συμβάλλουν **καταστρεπτικά**

- Αφού

$$2A \cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) = 2A \cos\left(\frac{(2m + 1)\pi}{2}\right) = 2A \cos\left(m\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Υπέρθεση

$$\Phi_i = kr_i - \omega t + \varphi_i$$

- Συμβολή ηχητικών κυμάτων

- Επίσης

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \Delta\Phi = k(r_2 - r_1) + \Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta r}{\lambda} + \Delta\varphi$$

- Αν η αρχική φάση είναι ίδια (π.χ. κοινή πηγή ήχου):

$$\Delta\varphi = 0$$

- Ενισχυτική συμβολή:

$$2\pi\frac{\Delta r}{\lambda} = 2m\pi \Leftrightarrow \Delta r = m\lambda, m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- Καταστρεπτική συμβολή:

$$2\pi\frac{\Delta r}{\lambda} = (2m + 1)\pi \Leftrightarrow \Delta r = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}, m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Υπέρθεση

• Συμβολή ηχητικών κυμάτων

• Καταστρεπτική συμβολή – πότε συμβαίνει?

- Λόγω διαφοράς αρχικής φάσης $\Delta\phi$ - (a)

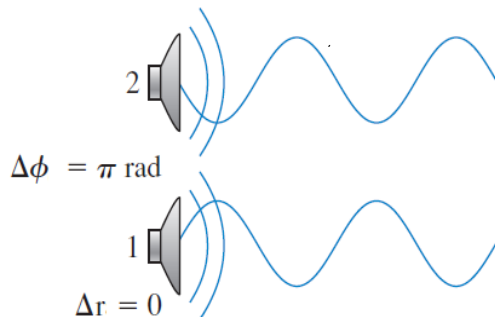
- Λόγω διαφορετικής θέσης της πηγής - (b)

- Διαφορετικό μήκος διαδρομής Δr

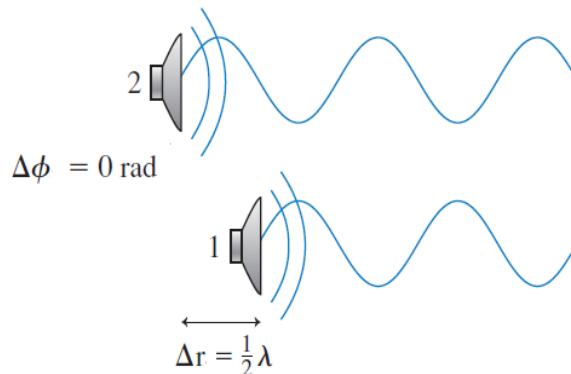
- Λόγω και των δυο παραπάνω παραγόντων - (c)

- Στο παρακάτω σχήμα, έχουμε $\Delta\Phi = \pi$ σε κάθε περίπτωση

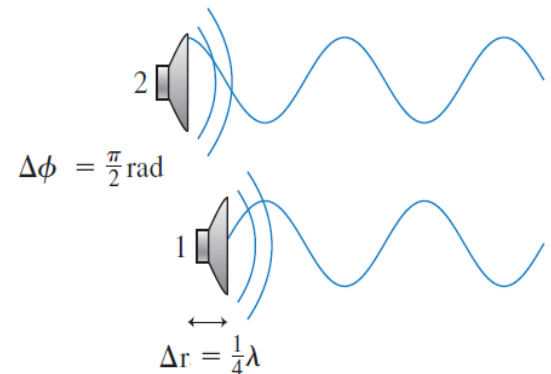
(a) Οι πηγές είναι εκτός φάσης



(b) Ίδιες πηγές διαφέρουν από μισό μήκος κύματος



(c) Οι πηγές είναι ξεχωριστές και (μερικώς) εκτός φάσης

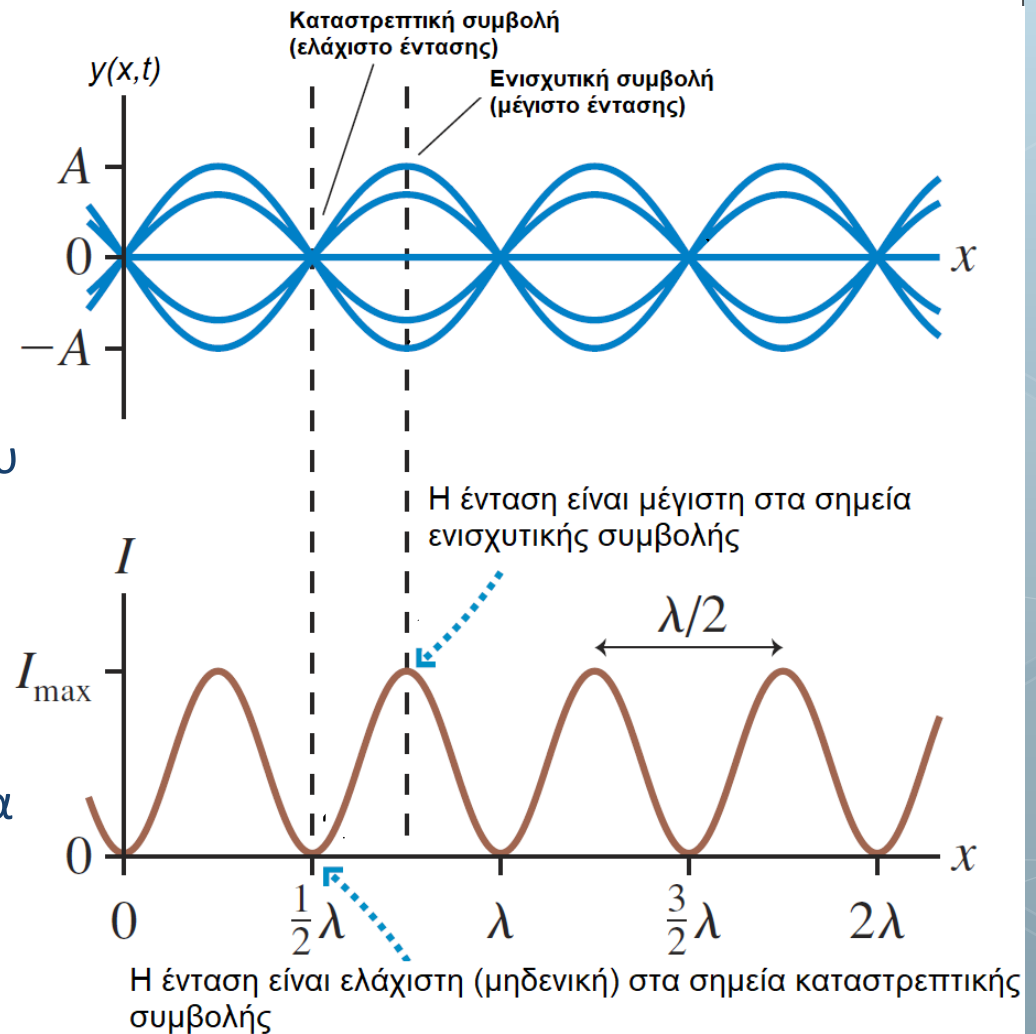


Υπέρθεση

- Συμβολή ηχητικών κυμάτων

- Μπορεί κανείς να δείξει ότι η ένταση I ενός ηχητικού κύματος είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους του κύματος, A^2

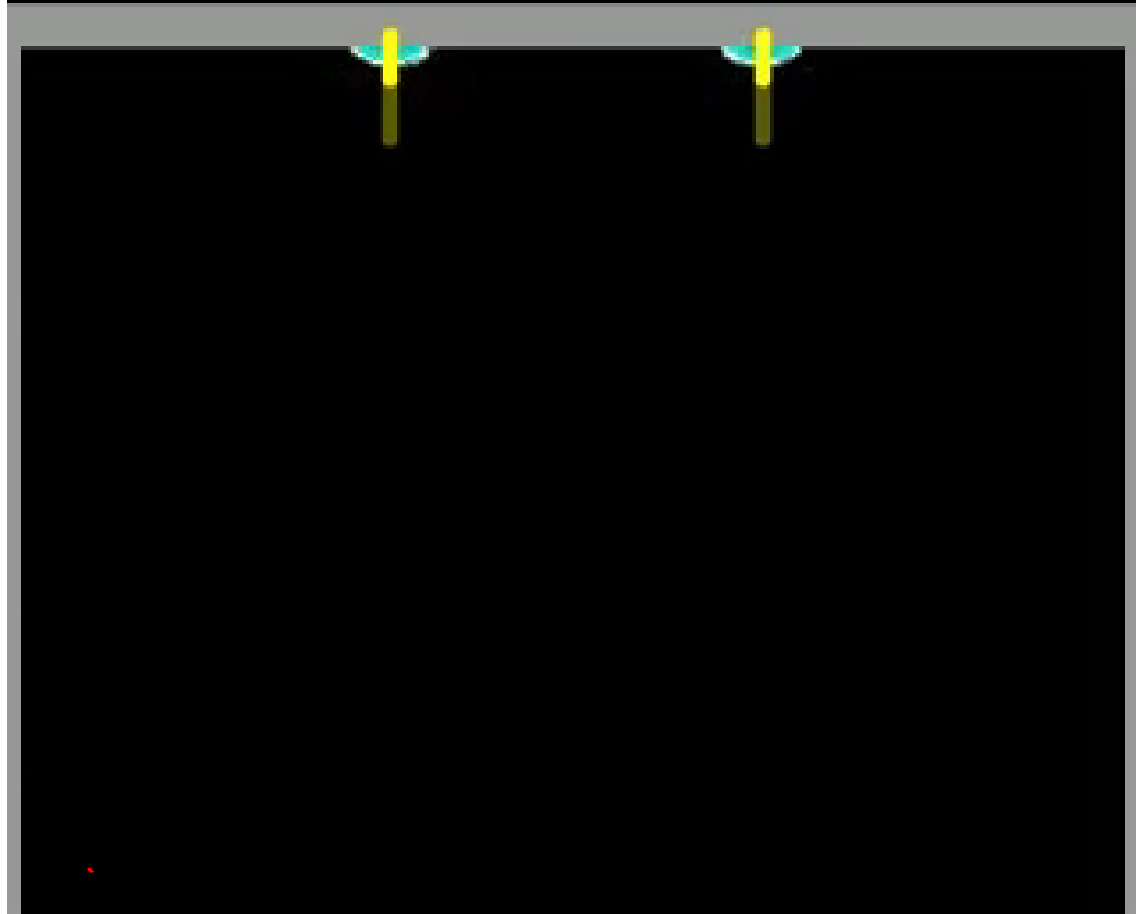
- Η ένταση I του ήχου είναι μέγιστη στα σημεία ενισχυτικής συμβολής και μηδενική (ελάχιστη) στα σημεία καταστρεπτικής συμβολής



Υπέρθεση

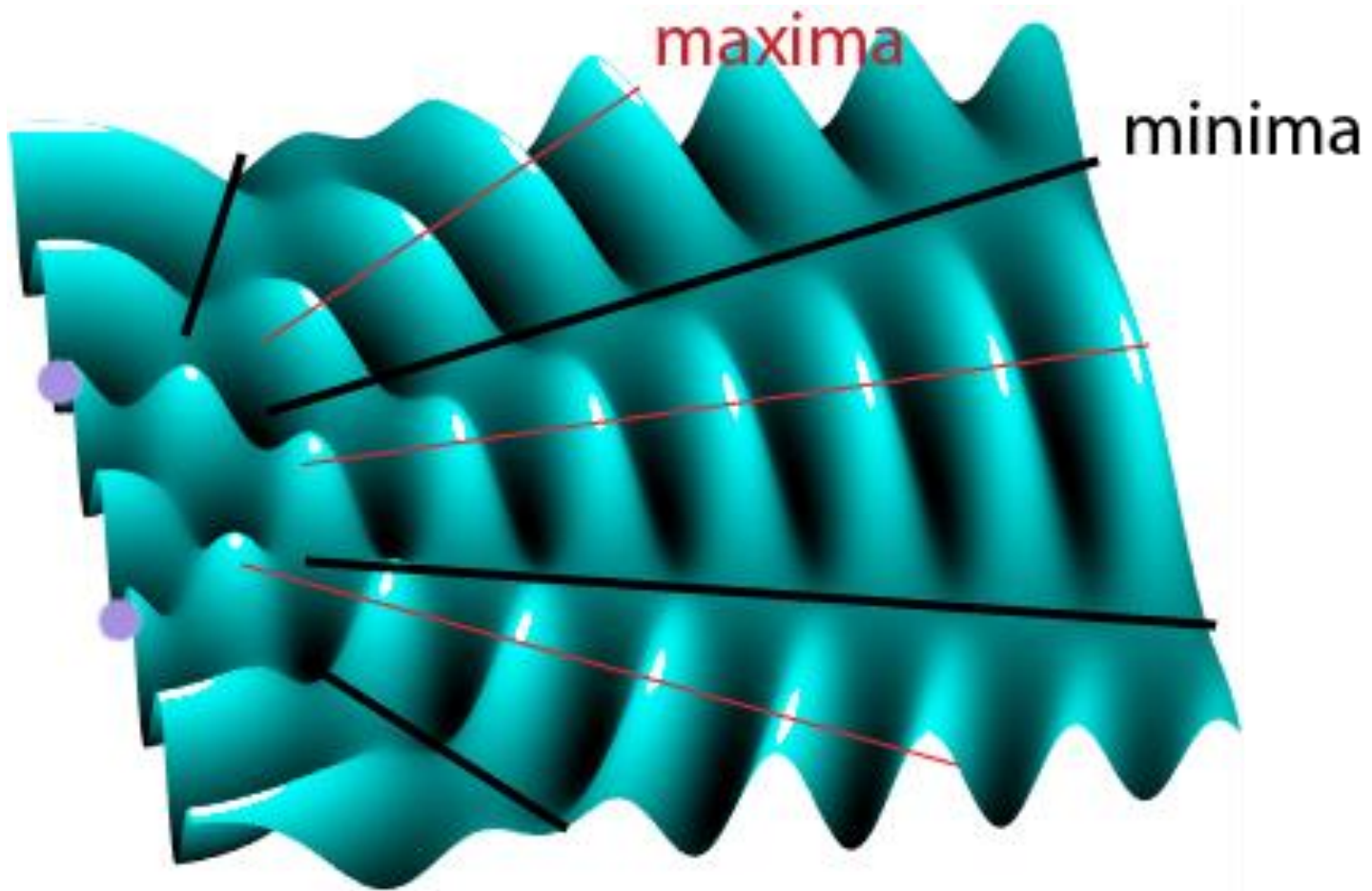
- Συμβολή
ηχητικών
κυμάτων

Two source interference



Υπέρθεση

ο Συμβολή ηχητικών κυμάτων

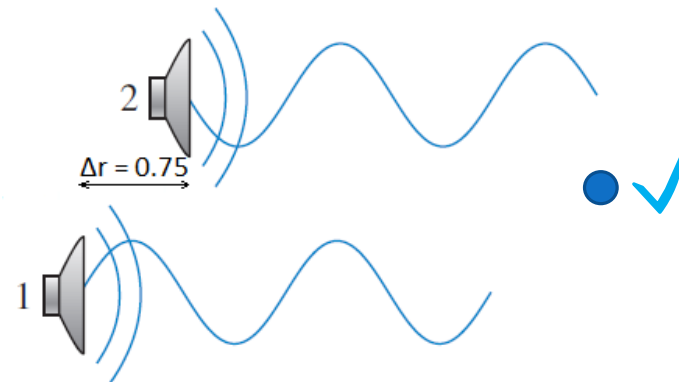
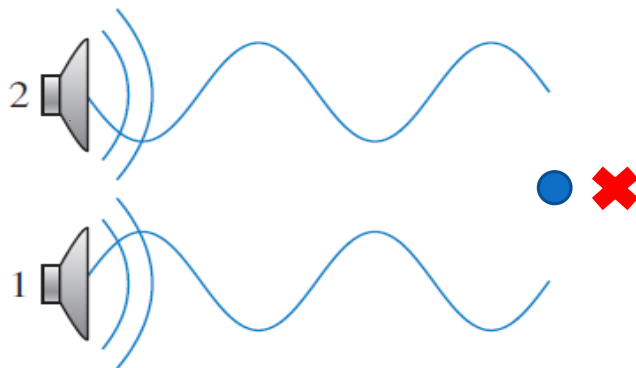


Υπέρθεση

● Παράδειγμα:

Δυο ηχεία στέκονται ακριβώς μπροστά σας, το ένα δίπλα στο άλλο και παίζουν την ίδια συχνότητα. Αρχικά δεν ακούτε κάποιον ήχο.

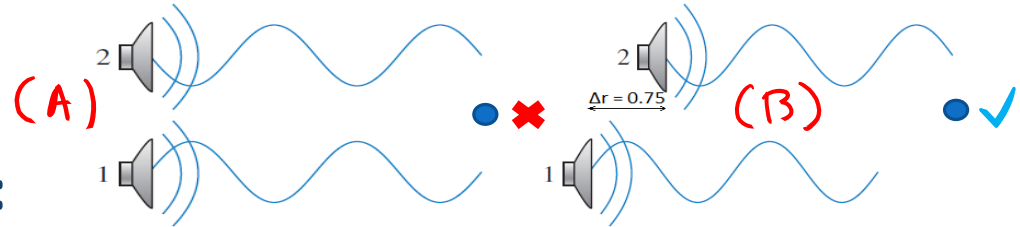
Τότε ένα από τα ηχεία αρχίζει σιγά σιγά να κινείται μακριά από σας. Η ένταση του ήχου αυξάνεται όσο η απόσταση μεταξύ των ηχείων αυξάνεται, φτάνοντας ένα πρώτο μέγιστο όταν τα ηχεία βρίσκονται σε απόσταση 0.75 m μεταξύ τους. Τότε, όσο το ηχείο συνεχίζει να κινείται, η ένταση αρχίζει να μειώνεται. Πόση είναι η απόσταση μεταξύ των ηχείων όταν η ένταση του ήχου γίνει ξανά ελάχιστη?



Υπέρθεση

• Παράδειγμα – Λύση:

- Δυο ηχεία στέκονται μπροστά σας δίπλα-δίπλα και παίζουν την ίδια συχνότητα. Αρχικά δεν ακούτε κάποιον ήχο. Τότε ένα από τα ηχεία αρχίζει σιγά σιγά να κινείται μακριά από σας. Η ένταση του ήχου αυξάνεται όσο η απόσταση μεταξύ των ηχείων αυξάνεται, φτάνοντας ένα πρώτο μέγιστο όταν τα ηχεία βρίσκονται σε απόσταση 0.75 m μεταξύ τους. Τότε, όσο το ηχείο συνεχίζει να κινείται, η ένταση αρχίζει να μειώνεται. Πόση είναι η απόσταση μεταξύ των ηχείων όταν η ένταση του ήχου γίνει ξανά ελάχιστη?



Στην κατάσταση (A), δεν ακούτε κάποιον ήχο, άρα έχουμε καταστρεπτική συμβολή:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r + \Delta\phi \quad \left. \begin{array}{l} \Delta r = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta\phi = \Delta\phi = (2m+1)\pi, \quad m=0,1,2,3,\dots$$

$$\text{Άρα στην κατάσταση (A), } \Delta\phi = (2m+1) \cdot \pi \Big|_{m=0} = \pi \Leftrightarrow$$

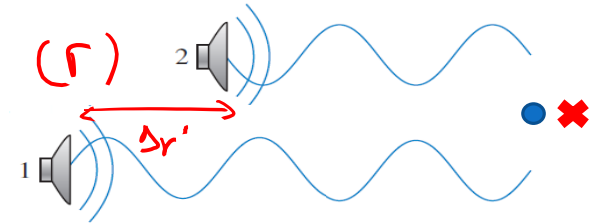
$$\Rightarrow \boxed{\Delta\phi = \pi} \quad \text{Στην κατάσταση (B), έχουμε ενισχυτική συμβολή!}$$

$$\text{Άρα } \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r + \overset{\pi}{\Delta\phi} = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r + \pi \Leftrightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{3}{4} + \pi \Leftrightarrow$$

Υπέρθεση

• Παράδειγμα – Λύση:

- Δυο ηχεία στέκονται μπροστά σας δίπλα-δίπλα και παίζουν την ίδια συχνότητα. Αρχικά δεν ακούτε κάποιον ήχο. Τότε ένα από τα ηχεία αρχίζει σιγά σιγά να κινείται μακριά από σας. Η ένταση του ήχου αυξάνεται όσο η απόσταση μεταξύ των ηχείων αυξάνεται, φτάνοντας ένα πρώτο μέγιστο όταν τα ηχεία βρίσκονται σε απόσταση 0.75 m μεταξύ τους. Τότε, όσο το ηχείο συνεχίζει να κινείται, η ένταση αρχίζει να μειώνεται. Πόση είναι η απόσταση μεταξύ των ηχείων όταν η ένταση του ήχου γίνει ξανά ελάχιστη?



$$\Rightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{3}{4} + \pi = 2m\pi, \quad m=0, 1, 2, 3, \dots \quad \left\{ \text{Για } m=0, \lambda < 0! \right\}$$

$$\text{Για } m=1, \quad \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{3}{4} + \pi = 2\pi \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2} \text{ m} = 1.5 \text{ m}$$

Στην κατάσταση (Γ) ακούτε το 2^ο ελάχιστο της έντασης του ήχου, άρα ξανά καταστρεπτική συμβολή!

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r' + \pi = (2m+1) \cdot \pi, \quad m=0, 1, 2, \dots \quad \left\{ \begin{array}{l} m=1 \\ \Rightarrow \end{array} \right.$$

$$\Delta r' = ?$$

$$\Delta\phi = (2+1)\pi = 3\pi = 2\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \Delta r' + \pi \Rightarrow \Delta r' = \frac{3}{2} \text{ m} = 1.5 \text{ m}$$



Τέλος Διάλεξης
